連続と微分可能について

高等学校で扱う関数では，微分可能性や連続性についてあまり問題にされない。ほとんどが何回でも微分可能な関数を対象としているからである。厳密に言えば，1回微分可能であることと，2回微分可能であることは意味が違う。すなわち，1回微分可能であっても2回微分可能ではない関数がある。

関数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ について考えてみよう。

この関数 $f(x)$は，

(i)　$n=1$ のとき, $f(x)$は実数全体で連続であるが，$x=0$ で微分可能ではない。

(ii)　$n=2$ のとき, $f(x)$は実数全体で微分可能であるが，$f'(x)$は $x=0$ で連続ではない。

(iii)　$n=3$ のとき, $f'(x)$は実数全体で連続であるが，$f'(x)$は $x=0$ で微分可能ではない。

すなわち，$f(x)$は $x=0$ において2回微分可能でない。

上の事柄ことについて証明しよう。

（証明）$n=2$ の場合については，省略するので各自で確かめよう。ここでは $n=3$ の場合について示しておこう。

$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=h^{n-1}\sin\dfrac{1}{h}\to 0$（$h\to 0$）だから，$f'(0)=0$

$x\neq 0$ のとき，$f(x)$ は連続で微分可能であり，実際にその導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}+x^n\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$$

$n=3$ のとき，$f'(x)=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=0$ となるから $f'(x)$ は $x=0$ で連続である。

また，$f'(0)=0$ より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3h\sin\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}\right)$$

となり，この極限は存在しないので $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない。　■

$n=4,\ 5,\ \cdots\cdots$ についても同様である。